

Examen commun	Traitement du signal	الامتحان المشترك
Variante	N°3	الموضوع
Coefficient : Un (01)		المعامل : واحد (01)
Horaire : 13h00		التوقيت : الواحدة زوالا
Durée : 01 Heure et 30 min		المدة : ساعة ونصف (1سا و30د)

Exercice 1 : (6 points)

Soit le signal gaussien f défini par $f(t) = e^{-at^2}$

1. Calculer la dérivée f' en fonction de f et montrer en appliquant la transformée de Fourier à l'identité obtenue que ladite transformée vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.
2. Intégrer l'équation différentielle obtenue dans et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv$.
3. En déduire la transformée de Fourier de e^{-at^2} et la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt$ pour $a > 0$.
4. En déduire la transformée de Fourier de $f_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ avec $\sigma > 0$ et montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(t) dt = 1$

Exercice 2 : (6 points)

On considère le signal $s(t)$ défini par $s(t) = \sum_{k=1}^q e^{j(2\pi f_k t + \varphi_k)}$, où f_k sont des fréquences positives et φ_k des variables aléatoires statistiquement indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$.

1. Déterminer la moyenne $E[S(t)]$ pour t fixe.
2. Déterminer la covariance des deux variables aléatoires $X_1 = S(t_1)$ et $X_2 = S(t_2)$.
3. On prend $q = 2$, et on désigne par $Re(x)$ la partie réelle de x . Exprimer sous la forme d'une intégrale la densité de probabilité f_Y de la variable aléatoire $Y = Re(S(0))$.
4. Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$.

On pose maintenant $x(t) = s(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc centré, de variance σ^2 indépendant de φ_k .

5. Calculer $E[x(t)]$ et déterminer la fonction d'autocorrélation γ_x .
6. Que peut-on conclure sur la stationnarité de $x(t)$?

Exercice 3 : (4 points) : Les réponses doivent être en puissances négatives de Z

On considère la séquence de longueur finie $x(n) = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$, et soit $X(z)$ sa transformée en Z . Si on échantillonne la séquence $X(z)$ à $z_k = \exp(j\frac{2\pi}{4}k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$, nous obtenons un ensemble de coefficients DFT $X(k)$.

1. Déterminer la séquence $y(n)$ ayant une DFT à 4 points ($N=4$) égale à ces échantillons.

Exercice 4 : (4 points) : Les réponses doivent être en puissances négatives de Z

Un système linéaire et invariant dans le temps (LIT) est défini par son équation aux récurrences suivante :

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16} y(n-2) = x(n)$$

1. Déterminer la réponse en fréquence $H(Z)$ du système ainsi que ses pôles.
2. Trouver la sortie $y(n)$ pour l'entrée suivante :

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right) \quad \text{avec } -\infty < n < +\infty$$

(Bon courage)